

# 数学的帰納法の意味理解を 促す一連研究の省察と教材開発

—「伝導性先行指導方略」に整合的な教材開発と授業実践—

愛知教育大学附属高等学校 五味 雅貴



国立大学法人  
愛知教育大学附属高等学校

# 1. はじめに

- ① 数学的帰納法指導の実状と課題
- ② 「伝導性先行指導方略」の提案
- ③ 本研究の目的

# 2. 数学的帰納法の困難性に関する先行研究

# 3. 自身の一連研究の省察

- ① 五味(2024)
- ② 五味(2025a)
- ③ 五味(2025b)

# 4. 教材開発

- ① デザインの方向性
- ② オリジナルウェーブ実践

# 5. 授業実践（×2）

- ① 概要
- ② 示唆
- ③ 結論

# 6. 総括と今後の課題



# はじめに

2

3

4

5

6

## ① 数学的帰納法指導の実状と課題

### 数学的帰納法

無限に続く命題を有限の手続きで証明する手法

#### 数学的帰納法の一般的な記述

一般に、自然数  $n$  を含む条件 (A) があるとき、  
「すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ」  
を証明するには、次の (I), (II) を示せばよい。  
(I)  $n=1$  のとき (A) が成り立つ。  
(II)  $n=k$  のとき (A) が成り立つと仮定すると、  
 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

本研究では、...

(I) 初期成立性 (II) 伝導性

と呼ぶことにする。

### 意味理解の困難性

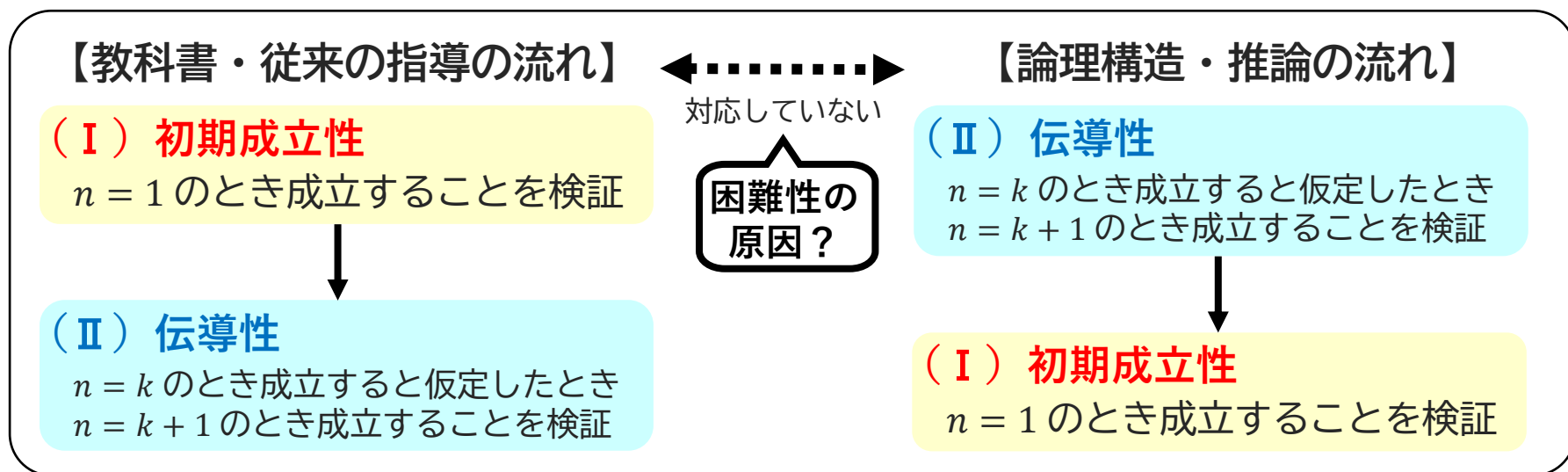
国内外の研究で理論的・実証的にその実態が検討されてきた。

例えば...

- Ernest, P. (1984)
- 村上(1990)
- Stylianides *et al.*(2007)

克服を目指すものの、  
科学的な研究はなされていない

## ② 「伝導性先行指導方略」の提案



**仮説** : この逆転現象こそが、意味理解を困難にしているのでは？

➡ 論理構造・推論の流れに則った「伝導性先行指導方略」の効果の検証のために一連の研究を進めてきた。



# はじめに

2

3

4

5

6

## ③ 本研究の目的

### 一連研究全体の大目的：

「伝導性先行指導方略」が数学的帰納法の意味理解に及ぼす効果を実証的に検証する。

### 本研究の目的：

- ①これまでの一連の研究を、省察的に整理すること。
- ②「伝導性先行指導方略」の効果を十分に引き出し得る数学的帰納法の導入教材（導入手立て）を開発し、その実践を報告すること。

1

2

# 数学的帰納法の困難性に関する先行研究

3

4

5

6

## 数学的帰納法の困難性に関する先行研究

村上(1990)

「疑問や誤りが生じる原因」として、3つを指摘している。

**困難性②**

$n = k$  のときの  
意味と意義

**困難性①**

$P(1)$  の意味

**困難性③**

$P(k) \rightarrow P(k+1)$   
の証明の意味

真野(2016)の解釈に基づく**①**の再考

なぜ  $n = 1$  の場合を、まず証明しなければならないのか？

⇒ **初期成立性の  
必要性の理解不足**

真野(2016)の解釈に基づく**②**の再考

文字  $k$  が何を指しているか分からない

⇒  **$k$  の一般性の理解不足**

真野(2016)の解釈に基づく**③**の再考

$P(k)$  が真か分からないのに、なぜ  $P(k+1)$  が真と断言していいのか？

⇒  $P(k+1)$  の直接命題と誤認識

⇒ **含意命題の理解不足**

# 1 2 3 自身の一連研究の省察 4 5 6

## 本研究の目的：

- ①これまでの一連の研究を、省察的に整理すること。
- ②「伝導性先行指導方略」の効果を十分に引き出し得る数学的帰納法の導入教材（導入手立て）を開発し、その実践を報告すること。

### 【これまでの研究】

①(2024)

伝導性先行  
指導方略の  
効果の検証



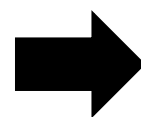
②(2025a)

指導案と、  
授業プロト  
コルの公開



③(2025b)

①で示され  
た効果に関  
する知見の  
再検証



### 【本研究】

伝導性先行  
指導方略の  
効果を十分  
に引き出す  
教材の開発  
と授業実践

まずはこの一連研究を説明します。

五味雅貴(2024).「数学的帰納法の意味理解を促す指導に関する実証的研究：生徒の思考プロセスに着目した指導方略の提案」.『愛知教育大学附属高等学校研究紀要』,第51号,47-56.

五味雅貴(2025a).「数学的帰納法の意味理解を促す指導に関する実証的研究(Ⅱ)：学習指導案の具体化と授業実践の報告」.『愛知教育大学附属高等学校研究紀要』,第52号,82-91.

五味雅貴(2025b).「数学的帰納法の意味理解を促す指導に関する再現研究」.第107回全国算数・数学教育研究大会石川大会発表資料.

## ①五味(2024)

**目的** : 伝導性先行指導方略が3つの困難性に効果があるかを検証

**方法** :

|      |   |                                        |
|------|---|----------------------------------------|
| 時期   | : | 2023年9月                                |
| 対象   | : | 国立大学附属高校2年 文系48名 (A組・B組)               |
| 指導   | : | A組→伝導性先行指導 B組→伝統的な指導                   |
| 調査問題 | : | Stylianides et al(2007)と真野(2016)を参考に作成 |

**結論** :

- 初期成立性の理解には肯定的な効果あり
- × 文字の一般性の理解には効果なし
- 含意命題の理解には肯定的な効果あり



1

2

3

# 自身の一連研究の省察

4

5

6

## 【調査問題】

Stylianides et al(2007)

命題：

すべての自然数  $n$  に対して、次が成り立つ。

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 + 3 \dots (*)$$

証明：

$n = k$  のとき (\*) が成り立つと仮定すると、

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 + 3$$

すると、次のように、 $n = k + 1$  のとき、(\*) が成り立つ。

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= (k^2 + 3) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 + 3 = (k + 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって、すべての自然数  $n$  に対して (\*) が成り立つ。

真野(2016)

A 君：この証明は正しくないよ。 $n = 1$  のときに等式 (\*) が成り立つことを示していないから。

B さん：どうして  $n = 1$  のときを示す必要があるの？

C 君：この証明は、“ $n = k$  のとき等式 (\*) が成り立つならば  $n = k + 1$  のとき等式 (\*) が成り立つ”を示しているね。この部分の証明は正しいと思う。

D さん：数学的帰納法による証明をするときにいつも思うのだけど、真であることを証明しようとしているのに、真であると仮定したのでは、証明が成立しないではないの？

このスクリプトを提示してから以下の4つの問い…

問題1 A君の発言は正しいか答えよ。また、そう考える理由を記述せよ。 (困難性①)

問題2 Bさんの発言に関して、あなたの考えを記述せよ。 (困難性①)

問題3 C君の発言は正しいか答えよ。また、そう考える理由を記述せよ。 (困難性②)

問題4 Dさんの発言に関して、あなたの考えを記述せよ。 (困難性③)

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.

真野祐輔 (2016). 「証明読解の水準からみた数学的帰納法に関する困難性の特徴づけ：大学生19名を対象とした質問紙調査を通して」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第22巻, 第2号, 123-132.

## ②五味(2025a)

五味(2024)に残された課題：

具体的な**発問**や生徒の**反応**等が示されておらず不透明

➡ 他の教員が実践に応用する際の**再現性**や**汎用性**に課題アリ

**目的**： 授業における伝導性先行指導方略の実際の展開の明示

**結論**： 「伝導性先行指導方略」を反映した指導案と伝統的な指導を反映した指導案を示した。また。授業実践における教員と生徒の対話の記録を報告した。

### ③五味(2025b)

五味(2024)に残された課題：

知見の**再検証の必要性**（被験者48名だった．．．）

**目的**：伝導性先行指導方略の効果を再現研究を通して再検証

**方法**：「時期・対象・授業者」は変更したが、「授業方法・授業内容・調査問題・評価枠組み」は同一にして研究を進行

**結論**：

- 初期成立性の理解には、肯定的な効果ありと**再現された**
- × 文字の一般性の理解には、効果なしと**再現された**
- △ 含意命題の理解については、**効果は限定的で、生徒間の差が大きい。**

1

2

3

## 自身の一連研究の省察

4

5

6

五味(2025b)の結論の一つ :

含意命題の理解については、**効果は限定的で、生徒間の差が大きい。**

**仮説** : 指導方略はいいが、**導入**や**教材**が適切でない可能性がある？

**なぜそう思うのか？** :

数学的帰納法の内容は教師が**一方的に教えている**のに、指導の仕方だけを**生徒主体に寄せる**のは一貫性を欠いたか？

**ではどうすべき？** :

伝導性が生徒の思考プロセス上に自然発生されるような教材の開発が必要

**本研究の目的：**

- ①これまでの一連の研究を、省察的に整理すること。
- ②「伝導性先行指導方略」の効果を十分に引き出し得る数学的帰納法の導入教材（導入手立て）を開発し、その実践を報告すること。

1

2

3

4

# 教材開発

5

6

## ①デザインの方向性 その1

### デザインの方向性

伝導性・再帰性を直感的に体感でき、自然な思考プロセスの中で先に志向するような教材

【2年前の導入教材】

$2^k \times 2^k$  の  
虫食い図形の  
敷き詰め

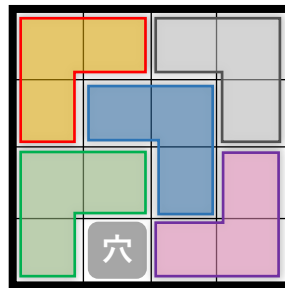
【1年前の導入教材】

クラス全員が挙  
手するルールを  
作成する活動

【本研究の導入教材】

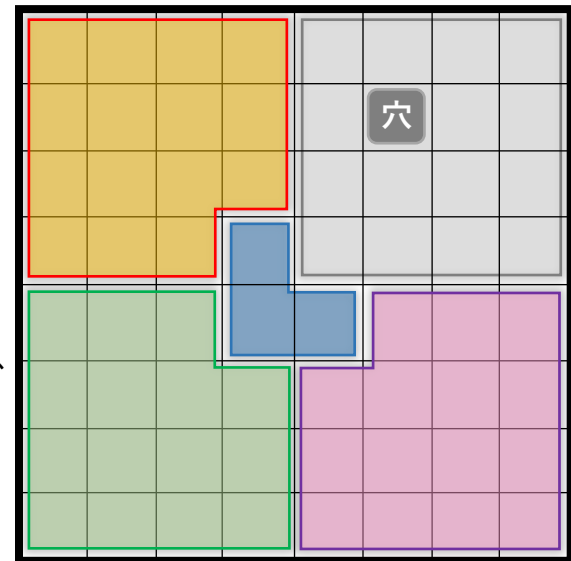
?

初期成立性  
 $4 \times 4$  の  
敷き詰め



伝導性  
(再帰性)

$8 \times 8$  の  
敷き詰め



$4 \times 4$  で成り立つかを確認、  
その結果をもとに  $8 \times 8$  を考  
えた。つまり思考は、一般数  
から直接始まらず、具体例を  
足がかりに広がっていった。



伝導性先行指導方略は、強引に誘導しない  
限り、自然には成立しない構造を持つ教材。

1

2

3

4

# 教材開発

5

6

## ①デザインの方向性 その2

### デザインの方向性

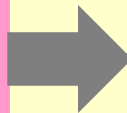
伝導性・再帰性を直感的に体感でき、自然な思考プロセスの中で先に志向するような教材

【2年前の導入教材】

$2^k \times 2^k$  の  
虫食い図形の  
敷き詰め

【1年前の導入教材】

クラス全員が挙  
手するルールを  
作成する活動



【本研究の導入教材】

?

「順番に挙手させる」という導入として比較的定番な活動

### 発問

ある人が手を挙げたとき、次の出席番号の人は必ず手を挙げるとします。もう一個何かルールを付け足して、このクラス全員が手を挙げるようにするためには、どのようなルールを付け足せばよいですか？



伝導性を既知とした状態で、初期成立性に関する条件を見出させるような手立て。

1

2

3

4

# 教材開発

5

6

## ①デザインの方向性 その3

### デザインの方向性

伝導性・再帰性を直感的に体感でき、自然な思考プロセスの中で先に志向するような教材

【2年前の導入教材】

$2^k \times 2^k$  の  
虫食い図形の  
敷き詰め



メリット：

日常的な探究課題であり、生徒が主体的に取り組む姿が見られた。

デメリット：

伝導性先行は、強引な誘導なしには自然に成立しにくい教材だった。

+

【1年前の導入教材】

クラス全員が挙  
手するルールを  
作成する活動



メリット：

「ある人が挙げたら」から始まり、伝導性先行に繋がる好例だった。

デメリット：

唐突に示されており、生徒の主体的な学びにはなっていなかった。

||

【本研究の導入教材】

？



過去の実践のメリットを踏まえ、現実的な場면을題材とすることで、生徒の主体的な学びを引き出しつつ、挙手活動のように伝導性（再帰性）が自然に生起する事例を構想する。

1

2

3

4

# 教材開発

5

6

## ②オリジナルウェブ実践

課題 :

附属高校の体育祭名物となるようなオリジナルウェブをデザインし、みんなにやってもらうために指示書を作りましょう。

本部

### 課題設計のポイント

- 現実的題材にし、生徒が主体的に探究に関わる学びに。
- 活動の流れが自然に「伝導性」から始まるように。
- 「初期成立性」の必要性を直感的に理解できるように。
- 実演可能な題材で、身体的活動を通して理解を促せるように。



1

2

3

4

# 教材開発

5

6

## ②オリジナルウェーブ実践

課題：

附属高校の体育祭名物となるようなオリジナルウェーブをデザインし、みんなにやってもらうために指示書を作りましょう。

指示書例：

・ 2つ左隣の人が手を挙げたら、次に自分が手を挙げる。（伝導性）

①各グループ、指示書を発表

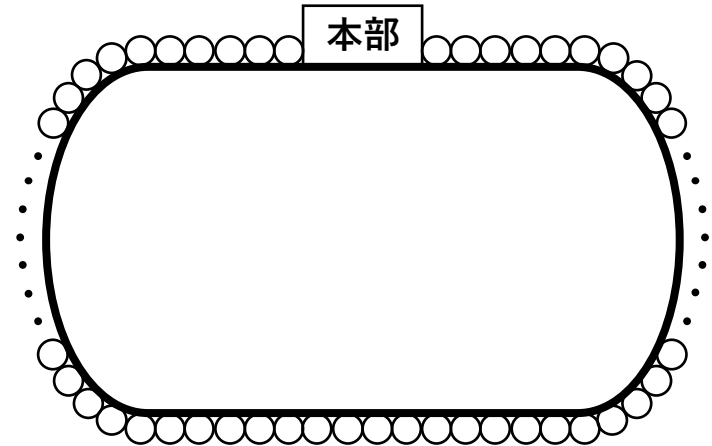
②キレイか？独創性があるか？実現可能か？で評価

③クラス全員での実演と、再評価

修正された指示書例：

・ 2つ左隣の人が手を挙げたら、次に自分が手を挙げる。（伝導性）

・ 左に本部がある人が先頭で、最初に手を挙げる。（初期成立性）



## ①概要

**日 時** : 令和 7 年 9 月 2 9 日（月） 第 5 限 （5 0 分授業）

**学 級** : 国立大学附属高校 2 年理系クラス 2 7 名

**教 材** : 教科書 数研出版「高等学校 数学B」

**準 備 物** : ワークシート・説明用スライド・ipad・Google classroom

**授 業 者** : 本研究者（教員歴 7 年目）

**参 観 者** : 同僚教員・大学院生・大学生

**単元計画** : 第 1 章 数列（全 2 3 時間）

第 1 節 等差数列と等比数列 1 0 時間

第 2 節 いろいろな数列 6 時間

第 3 節 漸化式と数学的帰納法 7 時間（本時 6 / 7）

## ①概要

### 授業の目標：

オリジナルウェブを作成・実演・修正する探究活動を通して．．．

- ①「伝導性」と「初期成立性」がそろえば、無限に続けて成り立つことを直感的に理解する。
- ②数学的帰納法の原理の意味と有用性を捉える。
- ③数学的帰納法を利用して、自然数全体にわたる命題を証明できるようになる。

1

2

3

4

5

## 授業実践（実践A）

6

## ①概要

## 【本時の展開】

導入

展開①

展開②

展開③

まとめ

導入  
7分

学習内容

- ・ 動機づけ
- ・ 本時の目的, 目標
- ・ 活動方法とルール

発問・声掛け・板書等

- ・ 附高名物になるウェーブをデザインしよう。
- ・ ウェーブを作成する上でのルールは？  
いつ行う？誰が行う？場所は？1列？2列？
- ・ グループ隊形になりましょう。

実際に授業で使ったパワポで説明します。

## ①概要

### 【本時の展開】



|            | 学習内容                                                                                                                                                             | 発問・声掛け・板書等                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 展開①<br>10分 | <ul style="list-style-type: none"><li>デザイン検討</li><li>指示文の記入</li><li>発表</li><li>評価</li><li>実演</li></ul><br><ul style="list-style-type: none"><li>指示文の修正</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>グループでデザインを考えましょう。</li><li>ワークシートに指示文を記入しましょう。</li><li>各グループ、デザインの説明をしてください</li><li>キレイか？独創性は？実現可能か？</li><li>実際に円形に並んでやってみましょう。<ul style="list-style-type: none"><li>✓ 初期成立性の必要性に関する指摘</li><li>✓ 無限性に関する指摘</li></ul></li><li>指示文を修正してもいいですよ。</li></ul> |

1

2

3

4

5

## 授業実践（実践A）

6

## ①概要

## 【本時の展開】

導入

展開①

展開②

展開③

まとめ

展開②  
7分

学習内容

- ・ 数学化
- ・ 帰納法の構造理解
- ・ 帰納法の説明

発問・声掛け・板書等

- ・  $k$  番目と、 $k+1$  番目の人を考えてみよう。
- ・ 伝導性のルールが先にあって、それに初期成立性があれば、ウェーブが完成しますね。
- ・ [1]  $n = k$  のとき成り立つと仮定すると、  
 $n = k + 1$  のときも成り立つ。
- ・ [2]  $n = 1$  のとき (A) が成り立つ。
- ・ 伝導性を示したのち、初期成立性が示せれば、任意の自然数で成り立つことが言えますね。

1

2

3

4

5

## 授業実践（実践A）

6

## ①概要

## 【本時の展開】

導入



展開①



展開②



展開③



まとめ

|            | 学習内容                                                                      | 発問・声掛け・板書等                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 展開③<br>20分 | <ul style="list-style-type: none"><li>等式の証明の解説</li><li>類題の出題と解説</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li><math>1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)</math> を数学的帰納法を利用して証明せよ。</li><li>数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。<br/>(1) <math>1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2</math><br/>(2) <math>1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)</math></li></ul> |

1

2

3

4

5

## 授業実践（実践A）

6

## ①概要

## 【本時の展開】

導入



展開①



展開②



展開③



まとめ

|                    | 学習内容                                                                       | 発問・声掛け・板書等                                                                                                                                                                        |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| まとめ<br>③<br>3<br>分 | <ul style="list-style-type: none"><li>・ 本時の振り返り</li><li>・ 次時への接続</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>・ なぜ2つの条件で証明ができるのか、説明してみよう。</li><li>・ 数学的帰納法で証明するとき、どんな点に注意すべきであったか振り返ってみよう。</li><li>・ 次どんなことを学ぶと思いますか？</li><li>・ 次どんなことを学びたいですか？</li></ul> |



1

2

3

4

5

## 授業実践 (成功)

6

大失敗！

## ②実際

## 導入

- ・活動に対する動機づけは、きちんと与えられた。

## 展開①

- ・子どもたちの考える「個性」が、意図とずれており、狙った数学的な議論にならなかった。提出できたのは10班中2班のみ。
- ・図に描き込んでいるため、初期成立性を先に考えていた。

## 展開②

- ・ $k$  番目と  $k+1$  番目の対応は理解できていた。
- ・伝導性が「アルゴリズム」で、初期成立性は「スタート」であるという構造は、後から天下りの説明をし理解を促した。

## 展開③

- ・展開①の数学的活動で時間がかかりすぎたため、例題は途中までしか解説できず、途中で止めてまとめに移った。

## まとめ

- ・なぜ2つの条件があれば、証明完了するかについて説明した。

### ③示唆（大失敗から得られたこと）

#### 1. 課題設定の難しさ

「オリジナル」の解釈が広く、手の挙げ方やタイミングなどに議論が流れた。本来は「挙げる順番」に焦点を当てたかったが、**問いがオープン**すぎた。

#### 2. 現実場面教材の構造的な限界

**現実場面や操作的活動**では、具体物や視覚可能な対象から議論を始めるため、**初期成立性から志向されやすい**。これは数学的帰納法の論理構造（伝導性先行）が誤っているわけではなく、本教材特有の問題である。

#### 3. 理論と実践のズレ

数学的帰納法は**演繹法**であると捉え、**伝導性は「アルゴリズム」、初期成立性は「スタートボタン」として機能するのが正しい解釈**だろう。しかし本教材では、初期成立性を**帰納的操作の一部**として強調してしまい、意図した「伝導性先行」を自然に生起させられなかった。

## ④結論（今後の打開策）

### 1. 導入教材には使わない！（過激派）

現実場面・操作的課題は、導入教材としては伝導性先行に不向きであることが示唆されるので、利用しない。

この立場で修正して  
再チャレンジ！

### 2. 使うなら強く誘導！（中道派）

それでもメリット（主体的な学び、身体化による理解）は大きいので、活かすなら「誘導的な問い（leading question）」や「方向づける足場かけ（directive scaffolding）」が必要。ただし構成主義の理念との矛盾に留意。

### 3. アルゴリズム教材に転換！（穏健派）

伝導性先行の自然さを活かすには、プログラミング教育との連携など、「プログラムを作成してみよう」といった文脈への転換が有効かもしれない。

## ①概要（変わった点のみ）

**日時**：令和7年9月30日（火）第2限（50分授業）

**学級**：国立大学附属高校 2年文系クラス 27名

**参観者**：**大学院生**

**発問**：附高名物となるウェブをデザインして、生徒たちにやってもらうための指示文を作成しよう！

誘導的な問い

附高名物となるウェブをデザインして、生徒たちにやってもらうために、次の指示文を完成させよう！

**ある人が手を挙げたら、（ ）の人が手を挙げる。**

**声掛け**：手の挙げ方とかではなく、**挙げる順番で個性**を出すように強調

**動画**：最初と終わりが視覚化されてしまう**小学生の動画はカット**

## ①概要（変わった点のみ）

ワークシート：

図を示すと具体的な数字（1番目、2番目...）で考えてしまい、初期成立性に誘導してしまうため、**図は用いなかった**。

オリジナルウェーブをデザインしよう！

( )班 メンバー:( )年( )組  
( ) ( ) ( ) ( )

○ 附高名物のオリジナルウェーブ！どんなデザインにしますか？指示文を作りましょう。

ウェーブ名：\_\_\_\_\_

指示文：

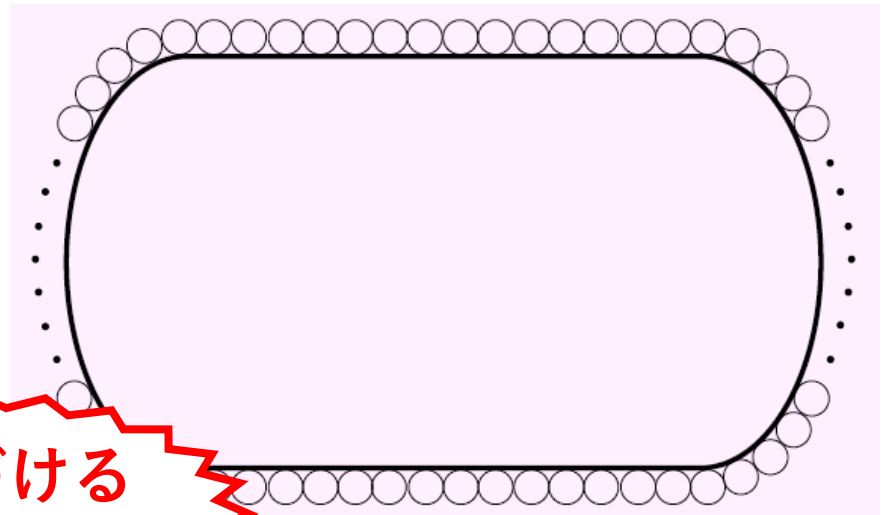
ある人が手を挙げたら、( )の人が手を挙げる。

(発表・実演を踏まえて)

○ 自分たちが作成した指示文を修正しよう！

問題図：

本部の存在がスタート位置を固定する印象を与えてしまうため、**本部を無くし**、単純な円形にした。



方向づける  
足場かけ

### ③示唆（実践Bから得られたこと）

#### 2. 使うなら強く誘導！（中道派）

それでもメリット（主体的な学び、身体化による理解）は大きいので、活かすなら「誘導的な問い（leading question）」や「方向づける足場かけ（directive scaffolding）」が必要。ただし構成主義の理念との矛盾に留意。

この打開策の結果...

#### 1. 授業構造の改善

当然ですが、誘導的な問いを入れたことで、伝導性から始まり、実演を通して初期成立性に気づく、という本来望んでいた流れが成立した。

#### 2. 数学的帰納法の意味理解の促進

初期成立性を「出発点」「スタートボタン」として直感的に理解し、「伝導性と初期成立性がそろえば、すべてに言える」という本質的構造を理解できていた。

#### 3. 活動から数学への接続

生徒はウェーブ活動で得た発想を、数学的帰納法のアイデアへと落とし込み、探究的活動と形式的理解を結びつけていた。

1

2

3

4

5

6

# 総括と今後の課題

## 総括

### ● ウェーブ教材は“条件付き成功”

新たに開発したウェーブ教材は、生徒の主体的な活動を促し、誘導的な問いを加えることで「伝導性→初期成立性」の流れを生起させることができた。  
一方で、教材そのものが理念的に整合しているとは言い難く、課題が残っている。

## 今後の課題

### ● そもそも伝導性先行指導方略でいいのか？

論理構造としては伝導性先行が“正しい”と確信しているが、問題解決や現実場面における操作的場面を考えると  $n = 1$  を先に考えることが自然であるため、そもそも伝導性先行指導方略の是非を再考する必要がある。

### ● 導入教材として考えるからまずいいのか？

本教材を導入教材として使うのが妥当か、それとも応用問題や発展的な文脈（例：2項ずつの帰納法など）で活用するのが適切か、その役割と適用範囲を再検討することが求められる。

# 謝辞

本教材開発および考察にあたり，愛知県立国府高等学校 吹原佑生先生より，多大なご助言とご協力を賜りました。誠にありがとうございました。

## 参考文献

- 五味雅貴(2024).「数学的帰納法の意味理解を促す指導に関する実証的研究：生徒の思考プロセスに着目した指導方略の提案」．『愛知教育大学附属高等学校研究紀要』，第51号, 47-56.
- 五味雅貴(2025).「数学的帰納法の意味理解を促す指導に関する実証的研究（Ⅱ）：学習指導案の具体化と授業実践の報告」．『愛知教育大学附属高等学校研究紀要』，第52号, 82-91.
- 真野祐輔 (2016).「証明読解の水準からみた数学的帰納法に関する困難性の特徴づけ：大学生19名を対象とした質問紙調査を通して」．全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第22巻, 第2号, 123-132.
- 村上一三 (1990).「数学的帰納法の理解の困難点について：証明の仕組みを視点として」．日本数学教育学会誌『数学教育』，第72巻, 第11号, 38-46.
- Ernest, P. (1984). Mathematical induction: a pedagogical discussion, Educational Studies in Mathematics, vol.15. 173-189.
- Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1991). Higher levels of agency for children in knowledge building: A challenge for the design of new knowledge media. The Journal of the Learning Sciences, 1(1), 37–68.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction, Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 145-166.