

高校生の代数的思考における パターン一般化に関する実態調査

2024/08/23 @東海附連研究協議会：算数・数学部会

愛知教育大学附属高等学校 五味 雅貴 (GOMI MASATAKA)

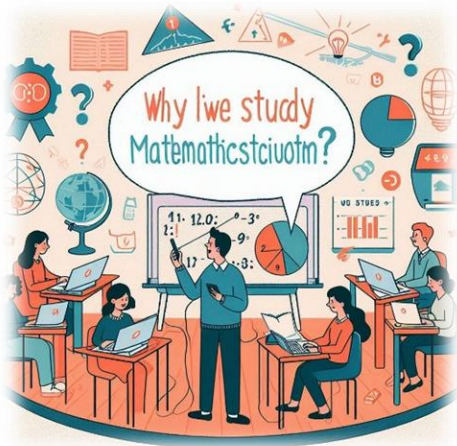


国立大学法人
愛知教育大学附属高等学校

1

問題の所在・目的

なぜ代数的思考なのか？



2

代数的思考

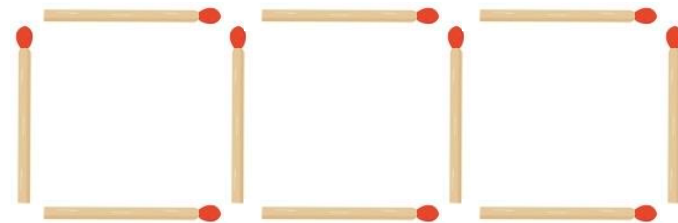
どんな思考・推論のことを指すのか？



3

代数的思考の一種である パターン一般化

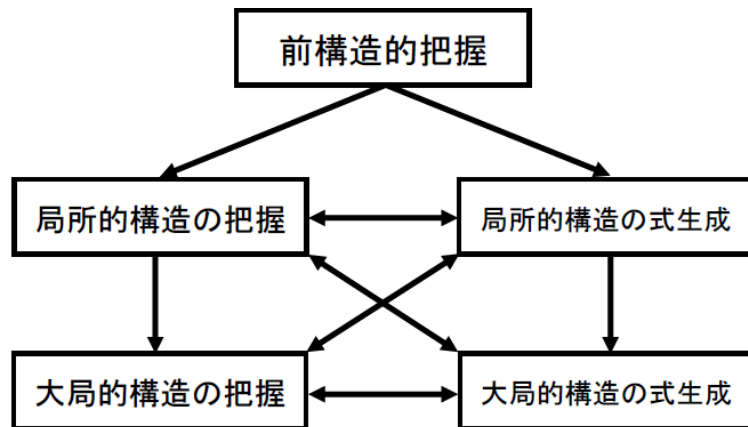
どんな考え方・問題のこと？どこで学ぶ？



4

パターン一般化モデル

パターン一般化を捉える枠組み



5

調査・分析・考察

高校生のもつ代数的思考能力はいかに？



問題の所在と研究の動機 ①

(日頃の授業実践における悩みの具体例)

1. 数列の一般項を求めるアイデアを自力で見出すことが困難
2. 数列の一般項を求める方法を式で表現することが困難
3. 公式 $nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ の導出および表現することが困難
4. 公式の導出は天下りの指導を待つ傾向。一般化を嫌う傾向。

仮説

一般化し，表現することに困難性がある？

1

問題の所在・目的

2

3

4

5

6

問題の所在と研究の動機 ②

仮説

一般化し，表現することに困難性がある？

代数的思考

○ 代数的思考研究の必要性 → 小学校から高校にかけて育成すべき能力

小学 6 年

中学 3 年

高校 3 年

先行研究はここしかない。

高校を対象とする研究が必要

本研究の目的

一連の研究(☆)の目的：

高等学校数学科における代数的思考の効果的な指導原理を設計する。

⇒つまり、代数的思考（一般化）能力をどうすれば育成できるか。

本研究の目的：

高校生の代数的思考（一般化）能力の実態を把握する。

(☆)の予備的研究として位置付ける。

Q. 代数的思考とは何か？

代数的思考・代数的推論の内包的定義 (Blanton & Kaput, 2005)

We take algebraic reasoning to be a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age appropriate.

(我々は代数的推論を，子どもが特定の事例の集合から数学的アイデアを一般化し，アーギュメンテーションのディスコースを通してそれらの一般化を確立し，それらを段々と形式的で年齢相応の方法で表現するプロセスと捉える。)

Q. 代数的思考とは何か？

代数的思考・代数的推論の外延的定義（Blanton & Kaput, 2005）

	代数的思考・代数的推論 数学的アイデアを一般化し，表現すること		
3つの カテゴリー	一般化算術としての 代数的推論	関数的思考としての 代数的推論	一般化や正当化に ついてのさらなる 代数的推論
対象とする 数学的アイデア	数の性質や計算	数的・幾何的パターン	既に一般化している 数学的アイデア
問 題 例	・ 加法の偶奇性 ・ $58 + 7 = \square + 5$	パターン一般化問題	3つの数による加法の偶奇性

1

2

3

パターン一般化

4

5

6

Q. パターン一般化とは何か？

個々の特殊なパターンの観察から規則や数量関係を捉え、その見つけた規則を利用して、他の項（任意の項）でも利用できるよう一般化すること。

3つの カテゴリー	関数的思考としての 代数的推論
対象とする 数学的アイデア	数的・幾何的パターン
問 題 例	パターン一般化問題

（石田, 2002 : Rivera, 2013 を参考に筆者が定義）

1

2

3

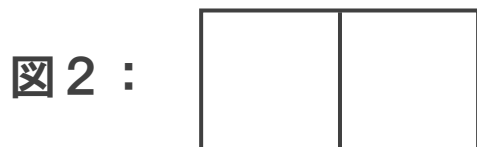
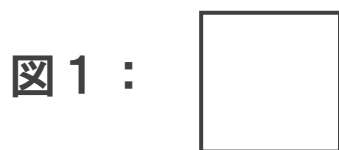
パターン一般化

4

5

6

Q. パターン一般化問題ってどんなの？

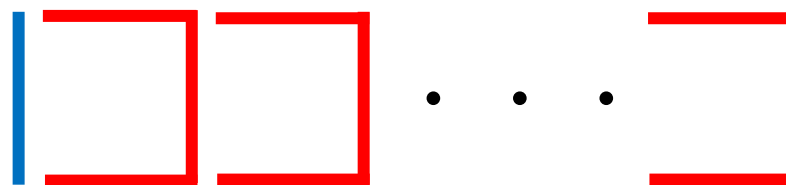


各辺はマッチ棒です。

図 100 を作るには、何本の
マッチ棒が必要ですか。

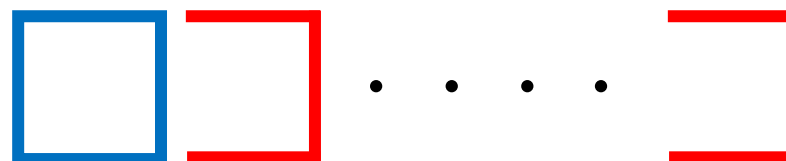
(西山, 2015)

① 「1ココ」



$$1 + 3 \times 100 = 301$$

② 「ロココ」



$$4 + 3 \times 99 = 301$$

1

2

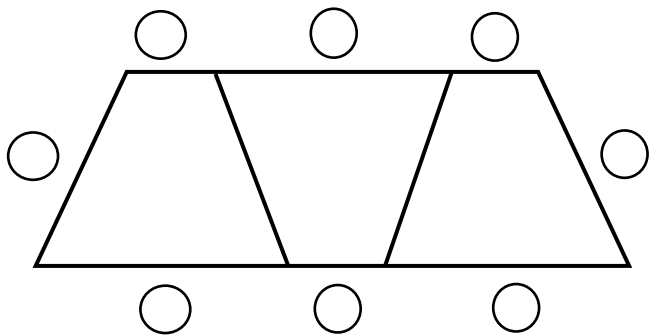
3

パターン一般化

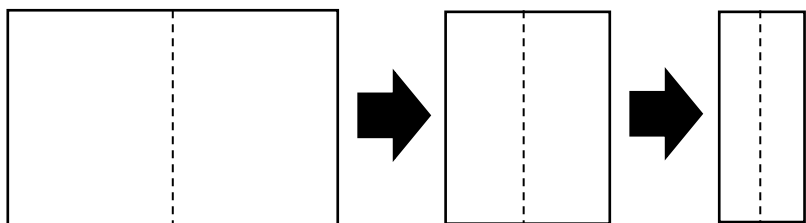
4

5

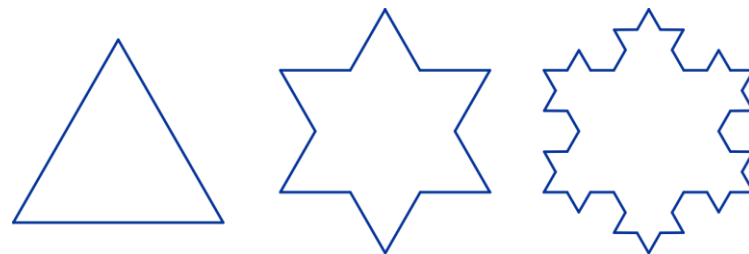
6



n 個テーブルがあるとき、
何人座ることができるか？



n 回折って開くと、
折り目は何本ありますか？



1 番目の図形の1辺の長さを1cmとする。
 n 番目の図形の周の長さは何cmか？

1月1日	⇒	1円
1月2日	⇒	2円
1月3日	⇒	4円
1月4日	⇒	8円
1月5日	⇒	16円
⋮		
⋮		
⋮		

左図のよう
に毎日貯金
する。1月 n
日の貯金額
はいくらか。

1

2

3

パターン一般化

4

5

6

Q. パターン一般化問題の解決プロセスはどんなの？

石田 (2002)	Radford (2008)	Amit & Neria (2008)
<段階 1> 変化のきまりを捉える。 「正方形が 1 増えるごとに 3 本ずつ増える」	<段階 1> 「図番号が 1 増えるとマッチ棒の本数は 3 増えている」等の共通性に気づく。	<段階 1> 変化のきまりを捉え，「前の図に 3 本加えると，次の図になる」等に気づく。
<段階 2> 構造を理解する。 「図 1 の 4 本をもとに，コの字分ずつ付け加えられている」	<段階 2> 共通性が，引き続く項でも成り立つことを理解し，一般化する。	<段階 2> 変数・定数を理解し，「任意の図の本数は，$4 + 3 \times (\text{図番号} - 1)$ である」という関数関係を捉える。
<段階 3> 簡単な項の式を作る。 「図 3 を $4 + 3 \times 2$ と式表示する」	<段階 3> 捉えた共通性をもとに，図 n を求めるための式 $4 + 3 \times (n - 1)$ を作る。	
<段階 4> 大きな項の式を作る。 「図100を $4 + 3 \times 99$ と式表示する」		

1

2

3

4

パターン一般化モデル

5

6

Q 1. 子どもたちのパターン一般化の様相をどのように捉えるか？

A 1. パターン一般化を捉えるモデルを開発する。

Q 2. どのようにモデルを開発するのか？

A 2. パターン一般化プロセスに関する先行研究と、
実際の授業実践（小学校）の様子を参考にして開発する。

1

2

3

4

パターン一般化モデル

5

6

レシビ
1

観点の設定

観点①：3つの思考対象

Radfordの3段階		思考対象
<段階1>	➡	(a) 視覚可能なパターン
<段階2>	➡	(b) 視覚可能でない部分に拡張されたパターン
<段階3>	➡	(c) 大局的構造・一般的構造

観点②：子どもの理解の4局面

石田の4段階		子どもの理解
<段階1>	➡	(i) 前構造的把握
<段階2>	➡	(ii) 構造的把握
<段階3>	➡	(iii) 局所的な式生成
<段階4>	➡	(iv) 大局的な式生成

1

2

3

4

パターン一般化モデル

5

6

レシピ
2

授業実践を分析するための枠組みの作成

		子どもの理解の4局面			
		(i) 前構造的把握	(ii) 構造的把握	(iii) 局所的な式生成	(iv) 大局的な式生成
3つの思考対象	(a) 視覚可能なパターン	次の図へ進むと、 マッチ棒の本数は3 増えている	図3は、図1の4本 に、コの字が2個追 加されている	図3の本数を求める 際に、式 $4 + 3 + 3$ を生成する	
	(b) 視覚不可能なパターン	ある図の本数は一つ 前の図の本数に3加 えればよい	図6でも、図1の4 本にコの字が5個追 加されている	図6の本数を求める 際に、式 $4 + 3 \times 5$ を生成する	
	(c) 大局的構造 ・ 一般的構造		ある図では、口の字 型の4本に「図番号 －1」個のコの字が 追加されている		任意の図の本数を求 める際に、式 $4 + 3$ $\times$ (図番号－1) を 生成する

1

2

3

4

パターン一般化モデル

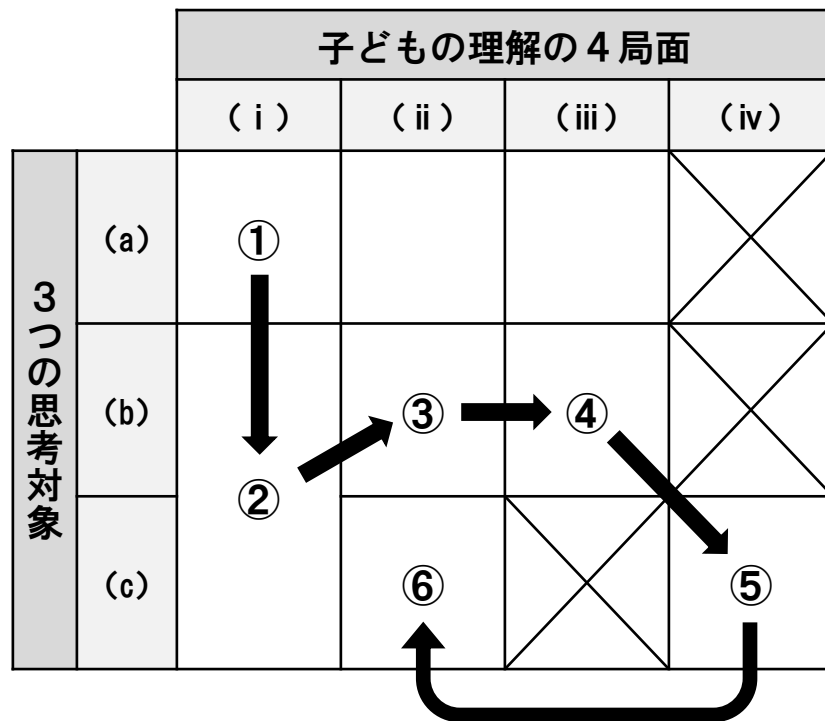
5

6

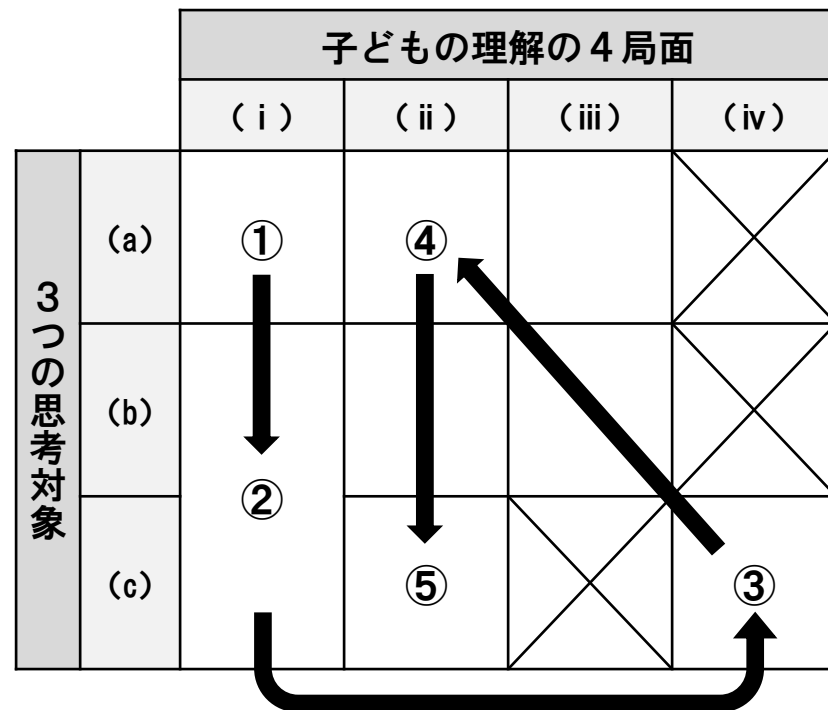
レシピ
3

授業実践の分析

伊藤（2002）の授業実践



平山（2011）の授業実践



1

2

3

4

パターン一般化モデル

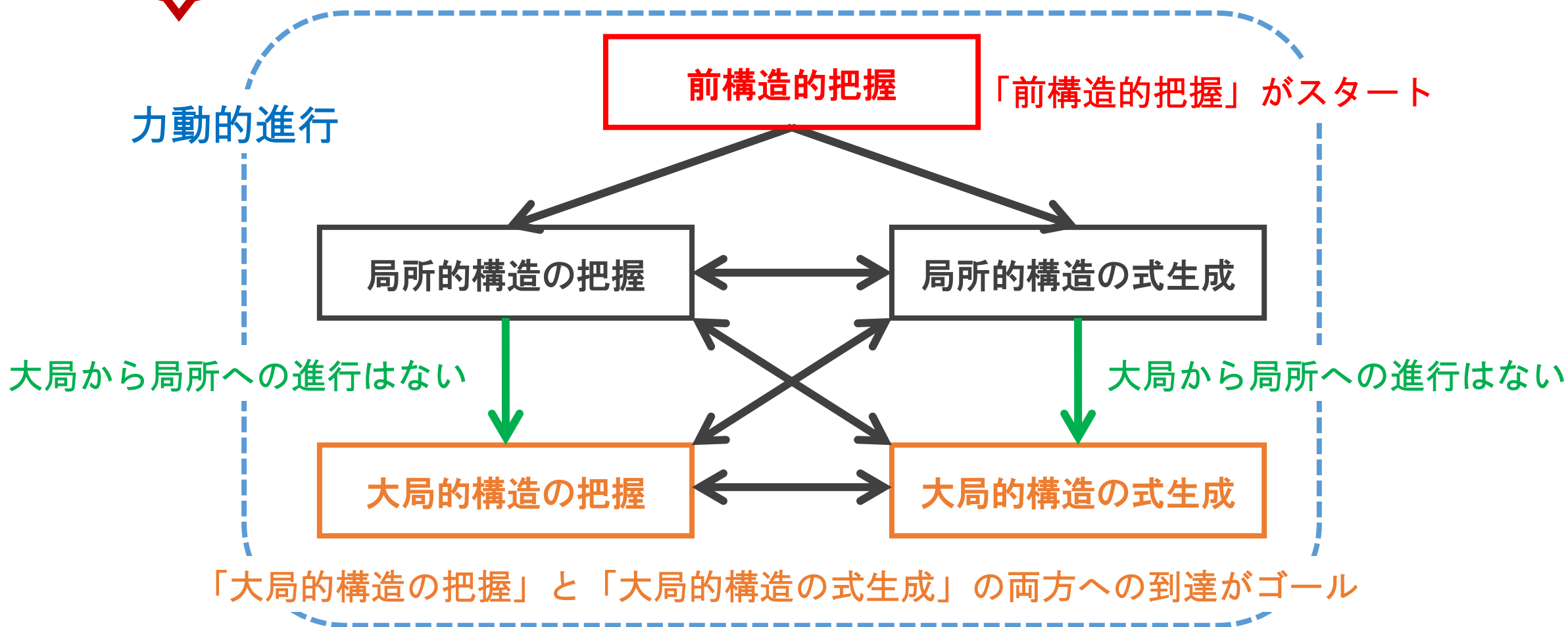
5

6

完成

パターン一般化の力動的過程モデル

(五味, 2019)



1

2

3

4

5

調査・分析・考察

6

1. 調査

目的： 高校生の代数的思考（特にパターン一般化）能力の実態を把握すること

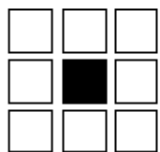
対象： 「数列」が未習の国立大学附属高校 1 年生 87 人（A 組 30 人 + B 組 28 人 + C 組 29 人）

問題： A 組 B 組 57 人には「誘導無し問題」を，C 組 29 人には「誘導有り問題」を出題

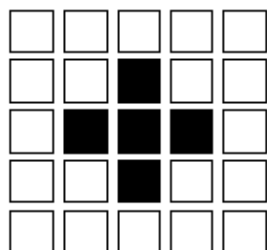
誘導無し問題

下の図のように，白いタイルと黒いタイルを規則的に並べる。
さて， n 番目の図では，白いタイルは何個あるか答えよ。

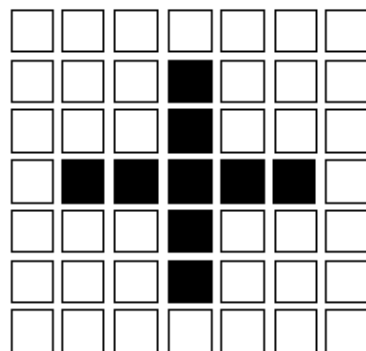
1 番目



2 番目



3 番目



誘導有り問題

（図 4 a と同様の問題設定）

- (1) 5 番目の図を書きなさい。
- (2) 7 番目の図では，白いタイルは何個あるか答えよ。
- (3) n 番目の図では，白いタイルは何個あるか答えよ。

1

2

3

4

5

調査・分析・考察

6

前構造的把握

- ・黒タイルに沿う形で、白タイルが配置されている。
- ・黒タイルの十字がだんだんと伸びている。

局所的構造的把握

- ・3番目(10番目)の図では、四隅にはそれぞれ1辺3個(10個)の正方形分の白タイルがあり、十字の位置にある白タイルは4個ある。

局所的構造的式生成

- ・3番目で $(3 \times 3) \times 4 + 4$ と立式する。
- ・10番目で $(10 \times 10) \times 4 + 4$ と立式する。

大局的構造的把握

- ・ n 番目の図では、四隅にはそれぞれ1辺 n 個の正方形分の白タイルがあり、十字の位置にある白タイルは4個ある。

大局的構造的式生成

- ・ n 番目で $(n \times n) \times 4 + 4$ と立式する。

1

2

3

4

5

調査・分析・考察

6

2. 分析

分析の2観点

① 到達レベル

目的

素朴なパターン一般化能力を測る。

方法

A組B組(問題 a)の記述内容から、
「大局的構造の把握」と「大局的構造
の式生成」の正否の割合を調べる。

② 困難性の同定

パターン一般化の困難性を特定する。

A組B組(問題 a)とC組(問題 b)の
各相への到達度を比較する。

3. ①の結果

	大局的構造 の把握	大局的構造 の式生成	到達度 (57人)	具体例
①	○	○	35.1% (20人)	構造を理解し，それをもとに立式ができる。
②	○	×	3.5% (2人)	n 番目の図の構造を理解しているが、立式ができない。
③	×	○	12.3% (7人)	構造は不明だが，羅列された数から立式ができる。
④	×	×	49.1% (28人)	構造も分からないし，立式もできない。

4. ①の考察

- ・不正解が64.9%(37人) ⇒ やはり高校生の一般化能力の問題は深刻か。
- ・「××」が49.1% ⇒ 何をしたいか全く分からない高校生が約半数。
- ・「○×」 < 「×○」 ⇒ 大局的構造の把握こそが，一般化完成の鍵。

3. ②の結果・考察

	到達度（86人）		具体例
	誘導 無 （AB組57人）	誘導 有 （C組29人）	
局所的構造の 把握	42.1%（24人）	86.2%（25人）	3番目の図の白タイルの配置構造が分かる
大局的構造の 把握	38.6%（22人）	55.1%（16人）	n 番目の図の白タイルの配置構造が分かる
局所的構造の 式生成	59.6%（34人）	75.9%（22人）	3番目の図で、 $(3 \times 3) \times 4 + 4$ と立式できる
大局的構造の 式生成	47.4%（27人）	41.4%（12人）	n 番目の図で、 $(n \times n) \times 4 + 4$ と立式できる

4. ②の考察

- ・ 誘導有りの方が一般化成功率が高い ⇒ 一般化プロセスの知識がない。
- ・ 大局的構造の式生成は、誘導の有無で変化がない

⇒ **n** 番目の式を作る技能がない。

1

2

3

4

5

6

まとめ・今後の課題

まとめ（示唆されること）

- ① 高校生の一般化能力の問題は深刻。
- ② 高校生の約半数が，何をしたいか全く分かっていない。
- ③ パターン一般化成功のキーは、大局的構造の把握。
- ④ 一般化プロセスに関する知識がない。
- ⑤ n を用いた式を作る技能に関する困難性がある。

1

2

3

4

5

6

まとめ・今後の課題

今後の課題（反省）

- ① 思考が顕在化されなかった。
- ② 未到達というより，未記述であるだけという可能性。
- ③ 調査方法と分析方法の再検討
（精緻に思考を捉えるならば，プロトコルの分析の方が妥当であった。
そして，困難性を同定するのであれば，各相の到達率ではなく，こういったプロセスによって一般化を試みているかをパス解析しなければならなかった。）

参考文献

- Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, 40, 111-129.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, No5 (Nov., 2005). 412-446.
- Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F.K. Lester Jr. (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 669-705. National Council of Teachers Mathematics.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - The international Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83-96.
- Rivera, F. (2013). Teaching and learning patterns in school mathematics: *Psychological and pedagogical considerations*. New York, NJ: Springer.
- 石田淳一 (2002). 「小学校の「一般化」問題の解決における困難性」. 『日本数学教育学会誌』, 84(6), 23-31.
- 伊藤利弘 (2000). 『新・算数授業講座④ 第4学年 / 授業の展開』. 東洋館出版社.
- 五味雅貴. (2019). 「パターン一般化に焦点を当てた代数的思考を促す指導に関する研究」. 愛知教育大学数学教育学会誌 『イプシロン』, vol.61, 153-160.
- 西山悠子 (2015). 「[今月の指導6年] 文字と式」. 『新しい算数研究』, No.532, 66-69.
- 平山誠 (2011, 11). 「[今月の指導4年] 伴って変わる2つの数量」. 『新しい算数研究』, No.490, 54-57.